Un modèle effectif de l'axiome d'univalence

Nantes, 24 Novembre, 2016

But de l'expoé

Voevodsky a trouvé la «bonne» formulation de l'axiome d'extensionalité pour la théorie des types dépendants

Cela a un très grand intéret pour les systèmes de preuves construits autour de ce formalisme

Mais cela a aussi un interêt mathématique intrinsèque puisque cela suggère une approche originale pour représenter les notions d'*univers* et d'*égalité*

Comment représenter la notion de collections d'objets mathématiques ?

Description des collections mathématiques

En théorie des ensembles, un *univers* (au sens de Grothendieck) sera un *ensemble* clos par certaines opérations

On utilise cette notion pour représenter les collections de *structures* algébriques (e.g.collection de tous les anneaux dans un univers donné)

Description des collections mathématiques

Dans l'approche de Voevodsky, ces collections sont représentées par des *types*

Tout type A a une notion d'identification, un type $\mathsf{Id}\ A\ a_0\ a_1$ des *identifications* de a_0 et a_1

On a alors une *stratification* des types suivant la complexité de leur notion d'identification

Par exemple, un *ensemble* se définit comme un type vérifiant que deux identifications pour ce type sont toujours égales (peuvent être identifiées)

Un groupoïde sera un type tel que tous ses types d'identifications sont des ensembles

Description des collections mathématiques

Un *anneau* sera un ensemble (en ce sens) muni d'une structure d'anneau

La collection (le type) de tous les anneaux pour un univers donné n'est plus un *ensemble*, mais un *groupoïde*

De même la collection (le type) de tous les ensembles, pour un univers donné, n'est pas un ensemble et est un groupoïde

Analogie avec ce qui se passe pour les faisceaux

Dès que l'on veut décrire un «faisceau» de *structures* on a besoin de remplacer la notion de faisceau par la notion de *champs*

Par exemple, si on définit $F(V)$ comme la collection des faisceaux sur V

On a une notion de restriction $F(V) \rightarrow F(W)$ si $W \subseteq V$

Ceci ne définit pas un faisceau : on a une condition 3 par 3 pour le recollement et le recollement n'est unique qu'à *isomorphisme* près

Axiome d'univalence

Dans ce cadre, Voevodsky a formulé l'axiome d'univalence

L'application canonique $\mathsf{Id}\ U\ A\ B \to \mathsf{Equiv}\ A\ B$ *est une équivalence*

Pour cela il a dû commencer par définir la notion d'*équivalence*

$\mathsf{isContr}\ B = \Sigma(b : B)\ \Pi(y : B)\ \mathsf{Id}\ B\ b\ y$

$\mathsf{isEquiv}\ T\ A\ w = \Pi(a : A)\ \mathsf{isContr}(\Sigma(t : T)\mathsf{Id}\ A\ (w\ t)\ a)$

$\mathsf{Equiv}\ T\ A = \Sigma(w : T \to A)\ \mathsf{isEquiv}\ T\ A\ w$

Axiome d'univalence

Si A et B sont des *ensembles* on retrouve la notion de *bijection* entre ensembles

Si A et B sont des *propositions* (type pour lequel deux éléments quelconques sont égaux) on retrouve la notion d'équivalence logique entre propositions

Si A et B sont des *groupoïdes* on retrouve la notion d'équivalence catégorique entre groupoïdes

Par exemple, dans ce cadre, le groupoïde de tous les ordres linéaires de longueur finie fixée est équivalent (et donc peut être identifié) au groupoïde trivial à un objet

Justification

Le modèle mis au point par Voevodsky repose sur la notion d'*ensemble simplicial* vérifiant la condition de Kan

1955 *Abstract homotopy I*, ensembles cubiques

1958 *A combinatorial definition of homotopy groups*, ensembles simpliciaux

Cette justification repose sur le fait qu'il a une structure de modèle au sens de Quillen sur les ensembles simpliciaux

Elle est *non effective*, et repose sur ZFC

Justification

Le but ici est de décrire un modèle effectif de l'axiome d'univalence (et d'autres opérations motivées par cet axiome)

On peut alors «faire tourner» les applications de l'axiome d'univalence et avoir l'impression de comprendre ce qui se passe

De plus, ce modèle se formule naturellement comme une extension de la théorie des types (conservative sur la partie de cette théorie sans égalités) qui a les propriétés desirées (typage et conversion décidable)

Un point intéressant, pour un logicien, est que le critère de correction sera *logique* (obtient-on un modèle de la théorie des types avec univalence ?), et non pas *géometrique/topologique*

Justification

On va utiliser une variation des ensembles cubiques de Kan

On obtient plus qu'une interprétation de la théorie des types avec l'axiome d'univalence

On obtient aussi une description effective d'une *structure de modèle* sur ces ensembles cubiques

Réciproquement, certaines idées développées pour les structures de modèles donnent des résultats surprenants en théorie des types; par exemple, on résoud le problème de définir un type d'identification qui a les bonnes propriétés calculatoires

Ensembles simpliciaux

Point de départ: structure de modèle au sens de Quillen

On peut décrire un univers des ensembles simpliciaux fibrants

(1) cet univers est lui-même fibrant

(2) cet univers vérifie l'axiome d'univalence

Pour (1) on utilise de manière essentielle la notion de *fibration minimale* qui repose sur l'axiome du choix

« At working with the uncountable, in particular with the well-ordering theorem, I always had the feeling that one uses fictions there that need to be replaced some day by more reasonable concepts » (Krull, 1953)

Ensembles simpliciaux

La définition de *fibration* repose sur la propriété de relèvement par rapport à toute inclusion $\Lambda_k^n \to \Delta^n$

Les *cofibrations triviales* sont les flèches qui ont la propriété de relèvement par rapport à toute fibration

Les *cofibrations* sont exactement les monomorphismes

Ensembles simpliciaux

En fait cette utilisation de fibration minimale est utilisée dès le début, pour montrer que l'on a bien un modèle des produits dépendants

On utilise pour cela que les équivalences sont préservées par produits fibrés le long de fibrations (comme lemme pour le fait que les cofibrations triviales sont sont préservés par produits fibrés le long de fibrations)

La preuve de ce fait est tout à fait *non triviale*

Notes on simplicial homotopy theory, André Joyal et Myles Tierney, preuve du Theorem 3.4.1 page 64, qui utilise la notion de fibrations minimales

Ensembles simpliciaux

La preuve que B^A vérifie la condition de Kan si B la vérifie est plus ⟪combinatoire⟫ ("assez technique et délicate", H. Cartan, Séminaire E.N.S. 56-57) mais reste intrinsèquement *non effective*

On peut penser que cette non effectivité vient du fait que la propriété de Kan est formulée comme *existence* d'un relèvement et non *choix* d'un relèvement

En fait, même si on remplace cette condition par un choix effectif, le résultat ne peut pas se démontrer de manière effective

cf. thèse d'Erik Parmann

Ensembles simpliciaux

On peut montrer (de manière non effective)

Un objet est *contractile* si et seulement si il est *injectif*

Une fibration triviale est un flèche qui a la propriété de relèvement par rapport à tout monomorphisme

Une fibration triviale est un flèche qui a la propriété de relèvement par rapport à toute inclusion $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$

Une fibration est une flèche qui a la propriété de relèvement par rapport à toute inclusion $A \times \Delta^1 \cup B \times 0 \rightarrow B \times \Delta^1$ et $A \times \Delta^1 \cup B \times 1 \rightarrow B \times \Delta^1$ pour $A \rightarrow B$ monomorphisme

Ensembles simpliciaux

On peut réduire l'analyse des *fibrations* à celle des *fibrations triviales*

X est fibrant, i.e. $X \to 1$ est une fibration, si et seulement si

$X^{d_0} : X^{\mathbb{I}} \to X$ et $X^{d_1} : X^{\mathbb{I}} \to X$

sont des fibrations triviales, avec $d_0 : 1 \to \mathbb{I},\ d_1 : 1 \to \mathbb{I}$ avec $\mathbb{I} = \Delta^1$

Le relèvement de $A \times \mathbb{I} \cup B \times 0 \to B \times \mathbb{I}$ pour $X \to 1$ se réduit au relèvement de $A \to B$ pour $X^{d_0} : X^{\mathbb{I}} \to X$

$A \times \mathbb{I} \cup B \times 0 \to B \times \mathbb{I}$ peut être vu comme un《produit》de $A \to B$ et $d_0 : 1 \to \mathbb{I}$

Modèle effectif

Si on prend ces propriétés comme *définitions* alors on peut montrer l'existence des produits dépendants de manière effective

Cela provient du fait qu'un object injectif possède automatiquement un choix *uniforme* de relèvements

Éléments partiels

Si F préfaisceau je note $F(X) \to F(Y),\ u \longmapsto uf$ l'opération de restriction correspondante à $f : Y \to X$

Sur toute catégorie de préfaisceau on a un objet Ω qui classifie les sous-objets

$\Omega(X)$ ensemble des *cribles* sur X

On peut définir $Par(A)$

$Par(A)(X)$ est l'ensemble des couples (S, u) avec

-S crible sur X et

-$u = (u_f)$ avec u_f in $A(Y)$ vérifiant $u_f g = u_{fg}$ si $f : Y \to X$ et $g : Z \to Y$

Éléments partiels

On a un monomorphisme canonique $A \to Par(A)$

A est injectif si et seulement si ce monomorphisme a un inverse à gauche (une rétraction)

Si on a un monomorphisme $B \to C$ alors tout $B \to A$ «s'étend» en une flèche $C \to Par(A)$

Donc si $A \to Par(A)$ a une rétraction on a une *famille uniforme* de relèvements par rapport aux un monomorphismes

Réciproquement si un objet a une famille uniforme de relèvement par rapport à tout monomorphisme de codomaine représentable alors, de manière effective, cet objet est injectif

Uniformité

On veut définir A *contractile*

On doit avoir pour tout représentable $[n]$ et tout crible $S : [n] \to \Omega$ et tout élément «partiel» $a : S \to A$ une *extension* $\mathsf{ext}(S, u) : [n] \to X$

La propriété d'*uniformité* est alors

si $f : [m] \to [n]$ on a $\mathsf{ext}(S, u)f = \mathsf{ext}(Sf, uf)$

ext est une rétraction $Par(A) \to A$

Cette propriété correspond à la propriété fondamentale de l'opération de *substitution* et est très naturelle si on veut avoir une représentation syntaxique de ce qui se passe

Éléments partiels

Cette re-définition marche pour le produit dépendant et les ensembles simpliciaux (Nicola Gambino, Christian Sattler) mais elle ne sera pas suffisante pour obtenir que l'univers est fibrant et pour montrer l'axiome d'univalence de manière effective (Andrew Swan, Leeds)

On doit remplacer Ω par un sous-treillis plus ⟪concret⟫, par exemple le treillis des *faces*

Pour représenter l'univers, on doit aussi avoir les représentables clos par le produit avec l'intervalle (Christian Sattler)

Pour les exemples simpliciaux $\Delta^1 \times \Delta^1$ n'est pas représentable

Ensembles cubiques

Comme catégorie de base, on prend les ensembles finis $I, J, \ldots$

Intuitivement, I représente $[0,1]^I$

On peut aussi penser aux éléments de I comme des «directions» formelles

Un morphisme $J \rightarrow I$ est donné par une application continue $[0,1]^J \rightarrow [0,1]^I$ definie à partir des opérations $max, min, 1-r$

Ensembles cubiques

Description purement algébrique : soit $L(I)$ le treillis libre distributif avec involution satisfaisant $r \wedge (1-r) \leqslant s \vee (1-s)$ alors un morphisme $J \to I$ est donné par une application $I \to L(J)$

Ceci définit une categorie des cubes $\mathcal{C}$ et la catégorie des ensembles cubiques $\mathcal{E}$ est la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$

On a un foncteur $\mathcal{C} \to \mathbf{Top},\ I \to [0,1]^I$ qui s'étend en un foncteur $\mathcal{E} \to \mathbf{Top}$

Ceci correspond aux ensembles simpliciaux et il reste à définir l'analogue de la propriété de Kan

Treillis des faces

Soit $\mathbb{F}(I)$ le treillis distributif engendré par les symboles $(i = 0),\ (i = 1)$ et la relation $0 = (i = 0) \wedge (i = 1)$

Si on pense à I comme $[0, 1]^I$, un élément de $\mathbb{F}(I)$ représente une *réunion de faces* (en un sens généralisé) de $[0, 1]^I$

On a un monomorphisme canonique $\mathbb{F} \to \Omega$

On redéfinit $Par(A)$ en ne considérant que des monomorphismes classifiés par $\mathbb{F}$

Un objet contractile consiste en un objet A *et* une section de la flèche canonique $A \to Par(A)$

Structure de modèle

On doit définir : fibration, cofibration et équivalence faible

Une *fibration* aura la propriété de relèvement *uniforme* par rapport à toute flèche $A \times \mathbb{I} \cup J \times 0 \to J \times \mathbb{I}$ avec $A \to J$ classifiée par $\mathbb{F}$

Une *fibration triviale* aura la propriété de relèvement *uniforme* par rapport à toute flèche $A \to J$ classifiée par $\mathbb{F}$

Une *cofibration* aura la propriété de relèvement par rapport à toute fibration triviale

Une *cofibration triviale* aura la propriété de relèvement par rapport à tout fibration

Structure de modèle

On a une décomposition de tout morphisme $f : A \to B$ en une cofibration $j : A \to C$ et une fibration triviale $q : C \to B$

On définit $C(I)$ comme ensemble des triplets v, φ, u avec v dans $B(I)$, (φ, u) dans $Par(A)(I)$ vérifiant $f\ u = v$

$j\ u = (f\ u, 1, u)$ et $q\ (v, \varphi, u) = v$

On a une projection $C \to \mathbb{F}$ qui classifie $j : A \to C$

Ceci correspond à un argument du type ⟪méthode du petit objet⟫ mais c'est complètement direct dans ce cadre

Structure de modèle

Définition : $f = qj$ *est une* équivalence faible *si et seulement si* j *est une cofibration* triviale

i.e. j vérifie la propriété de relèvement par rapport à toute fibration

Cette définition est forcée par les conditions

-《3 pour 2》 : si $f = qj$ et q sont des équivalences alors j est une équivalence

-une fibration triviale doit être une fibration qui est une équivalence

-une cofibration triviale doit être une cofibration qui est une équivalence

Structure de modèle

On a ainsi défini les 3 classes de flèches

fibration *cofibration* *équivalence faible*

On peut alors vérifier les propriétés de modèle (au sens de Quillen) *sans utiliser l'axiome du choix et sans référence au modèle géométrique*

C'est un résultat dû à Christian Sattler

Opération de «recollement»

La preuve que l'on obtient bien une structure de modèle commence par vérifier que l'on a bien un modèle de la théorie des types avec univalence

Cette preuve repose sur une opération de «recollement»

Cette opération était implicite dans la vérification de l'axiome d'univalence par Voevodsky

Les remarques nouvelles sont

(1) la vérification de l'univalence peut se faire effectivement

(2) cette même opération peut aussi être utilisée pour montrer que l'univers est fibrant

Famille de types

Si Γ est un ensemble cubique, on définit la catégorie des éléments de Γ

Un object est de la form I, ρ avec ρ dans $\Gamma(I)$

Si $f : J \to I$ on a $f : J, \rho f \to I, \rho$

Définition : *Une famille de type sur* Γ *est un préfaisceau sur la catégorie des éléments de* Γ

On note $\Gamma \vdash A$

Famille de types

Si $\mathcal{E}$ est la catégorie des ensembles cubiques alors $\mathcal{E}/\Gamma$ est *équivalente* (mais non isomorphe) à la catégorie des préfaisceaux sur les éléments sur Γ

C'est un bon exemple qui montre que la notion de modèle de théorie des types n'est pas une notion catégorique, mais une notion algébrique

Pour avoir une notion de types sur Γ on doit prendre les préfaisceaux sur les éléments sur Γ et pas les flèches de codomaine Γ

Famille de types

On peut définir $\Gamma.A$ et la projection $p_A : \Gamma.A \to \Gamma$

Une *structure de Kan* pour A est une structure de fibration pour p_A

On a la propriété uniforme de relèvement par rapport à tout monomorphisme classifié par $\mathbb{F}$ de codomaine représentable

Si $\sigma : \Delta \to \Gamma$ on définit $\Delta \vdash A\sigma$, qui inhérite d'une structure de Kan si A a une structure de Kan

Remarque : il n'y a jamais des ⟪problèmes de cohérence⟫ pour le modèle ensembliste et les modèles de préfaiseaux de la théorie des types

Opération de « recollement »

Étant donnés

-une famille de type $\Gamma \vdash A$

-un monomorphisme $\sigma : \Delta \rightarrow \Gamma$ classifié par $\mathbb{F}$ (donc une cofibration)

-une flèche $\Delta \vdash w : T \rightarrow A\sigma$

(1) on peut trouver $\Gamma \vdash G$ tel que $G\sigma = T$ (égalité *stricte*)

(2) une flèche $\Gamma \vdash e : G \rightarrow A$ tel que $e\sigma = w$

(3) si T, A ont une structure de Kan, et w est une équivalence, alors on a une structure de Kan sur G qui étend celle de T et e est une équivalence

Opération de « recollement »

Ce résultat a été formalisé par Mark Bickford dans le système NuPrl

Formulation abstraite dans un topos quelconque (Ian Orton et Andy Pitts)

Opération de «recollement»

On peut définir un univers U pour chaque univers de Grothendieck $\mathcal{U}$

$U(I)$ est l'ensemble des $\mathcal{U}$-types $I \vdash A$ *muni* d'une structure de Kan

On peut alors définir $U \vdash E$ qui a la propriété suivante

Si X ensemble cubique et $X \vdash A$ est une $\mathcal{U}$-fibration sur X, alors on a une flèche unique $\sigma : X \to U$ telle que $E\sigma = A$

Opération de ⟪recollement⟫

Alors, l'opération de ⟪recollement⟫ permet de montrer

(1) U a une structure de Kan

(2) $A : U \vdash \Sigma(X : U)$ Equiv A X définit une fibration triviale

L'énoncé (2) est en fait une formulation possible de l'univalence

Opération de «recollement» et structure de modèle

Le fait que U a une structure de Kan se traduit par exemple en

On peut étendre toute fibration en une fibration le long d'un cofibration triviale

Plus précisément

Si $\sigma : \Delta \to \Gamma$ est une cofibration triviale et $\Delta \vdash B$ a une structure de Kan, alors il existe $\Gamma \vdash A$ tel que $A\sigma = B$ (égalité stricte) qui a une structure de Kan qui se réduit sur celle de $\Delta \vdash B$

Théorie des types

Cette formulation en terme d'ensemble cubique correspond à une extension de la théorie des types

Les expressions sont des termes dans une extension «nominale» du λ-calcul

Cette extension est conservative sur le fragment sans égalités

On a un type des chemins Path A

$A \to$ Path A n'est pas une cofibration triviale, mais on peut utiliser la factorisation cofibration-fibration triviale pour obtenir un type Id A tel que $A \to$ Id A est une cofibration triviale

Théorie des types

Le modèle rend aussi compte de types inductifs comme les sphères

Par exemple, Rafael Bocquet a montré formellement que le cercle est équivalent au type des $\mathbb{Z}$-torseurs et transporté de cette manière des opérations sur le cercle (par exemple la multiplication et la structure monoidale symmétrique) sur les $\mathbb{Z}$-torseurs

Opération de troncation

L'opération est claire pour les groupoïdes

Si A est un groupoïde, la troncation « propositionnelle » de A est le groupoïde qui a les mêmes objets que A, et exactement une flèche entre deux objets

Pour les ensembles simpliciaux/cubiques la définition est plus subtile